1. Conceptos básicos de la teoría de Series de Fourier

Esencialmente la teoría de Series de Fourier persigue dos propósitos:

- El **análisis** o descomposición de una señal como suma o superposición (en general infinita) de sinusoides.
- La **síntesis** o recomposición de una señal a partir de sus sinusoides.

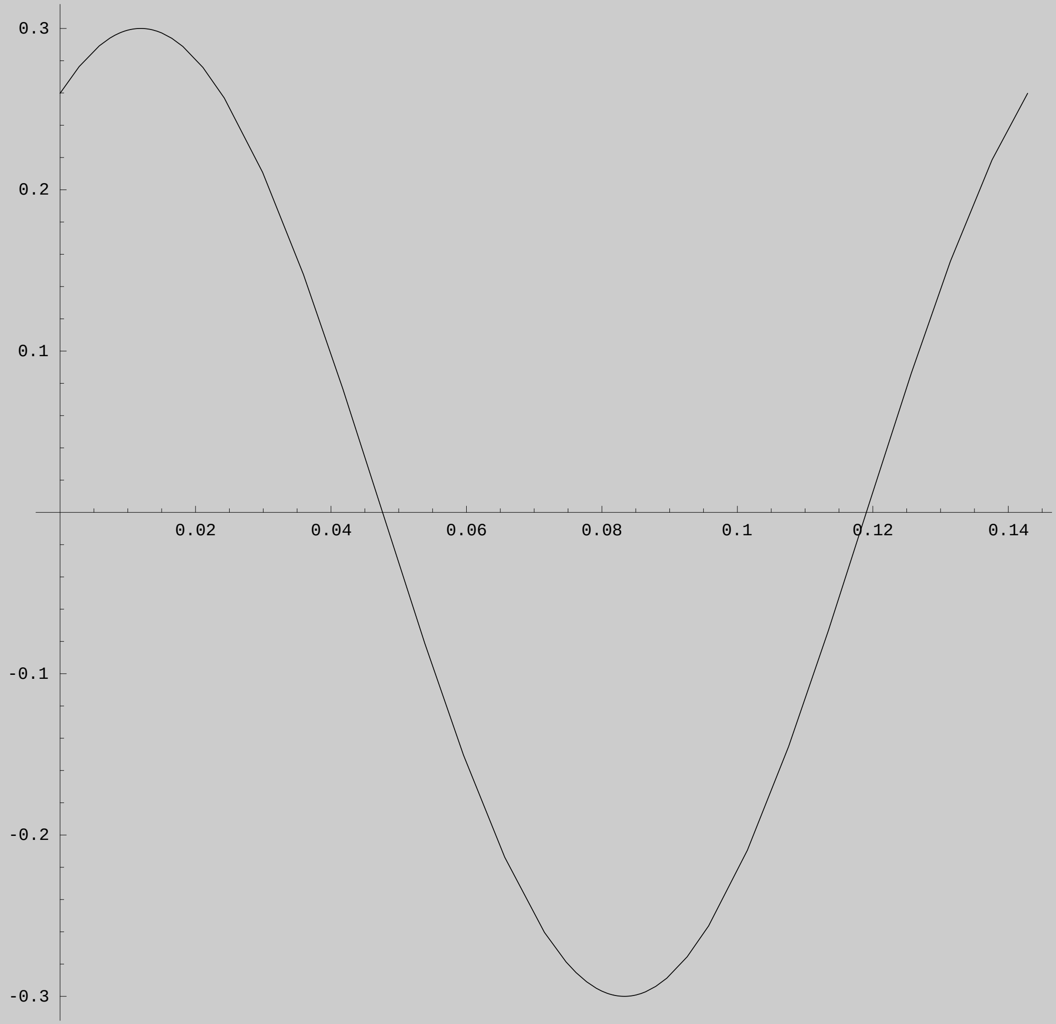
1.1. Sinusoides

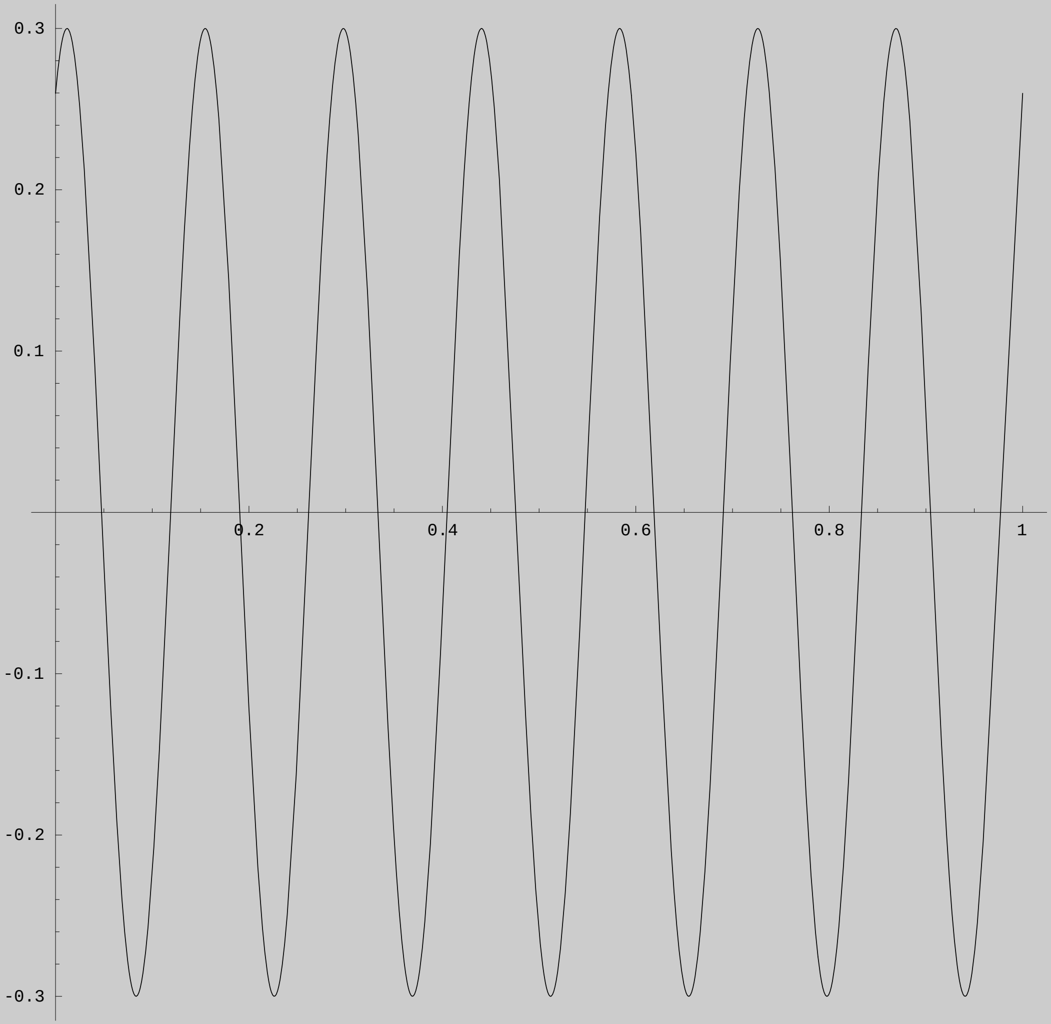
Una sinusoide es una señal de la forma

$$A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t+\phi).$$

El número $A>0$ es la ***amplitud***, $\nu>0$ es la ***frecuencia*** medida en ciclos por segundo o Hercios (Hz), $-\pi<\phi\leqslant\pi$ es la ***fase*** (fase inicial), $2\pi\nu$ es la frecuencia medida en radianes por segundo (que se llama a veces frecuencia angular). El ***período*** es el tiempo que necesita la sinusoide para completar un ciclo completo, es decir, el período es $T=1/\nu$ segundos.

$$A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu(t+1/\nu)+\phi)=A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t+2\pi+\phi)=A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t+\phi).$$


0.3
0.2
0.1
-0.1
-0.2
-0.3
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14


0.3
0.2
0.1
-0.1
-0.2
-0.3
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice que es *periódica* con *período* T si

$$f(t+T) = f(t)$$

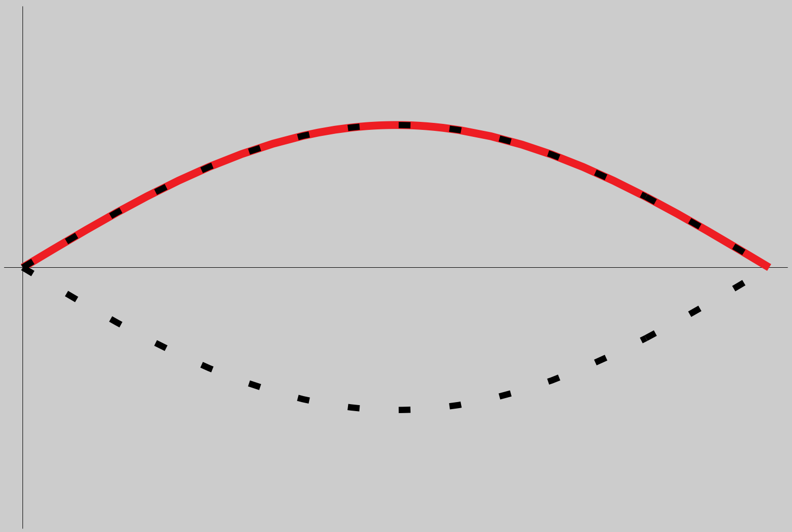
para todo $t \in \mathbb{R}$. En tal caso cualquier múltiplo entero de T es también un período de f, esto es, $f(t+kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Cuando se dice que una función es periódica de período T se sobreentiende que T es el número positivo más pequeño que verifica la igualdad $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

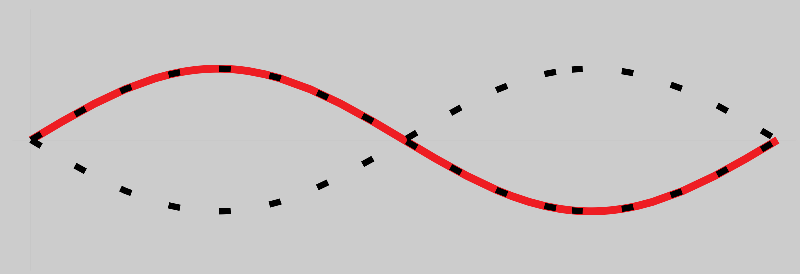
1.2. Frecuencia principal y armónicos

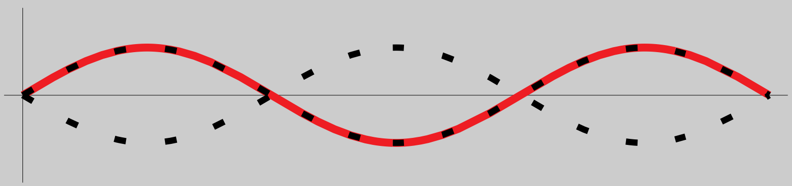
El **tono** de un sonido depende de la frecuencia. *Los sonidos graves se corresponde con bajas frecuencias y los agudos con frecuencias altas.* La **intensidad** del sonido se mide en decibelios (db) y *es proporcional a la amplitud de la señal.* El **timbre** o calidad de un sonido (lo que distingue una misma nota en diferentes instrumentos) depende de los **armónicos** que acompañan al armónico principal (después explicaremos esto de los armónicos).

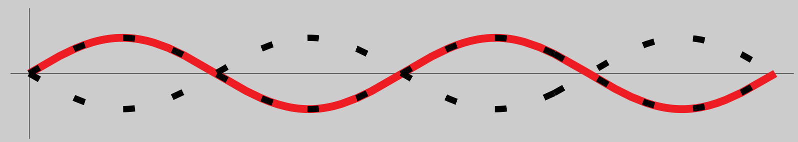
Las ondas sinusoidales tienen la particularidad de producir un sonido puro, es decir, un sonido que consta de una única frecuencia.

Los sonidos que producen los instrumentos musicales son mucho más ricos porque en ellos se superponen sonidos de distintas frecuencias: los armónicos. **Los armónicos son sonidos cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental**.





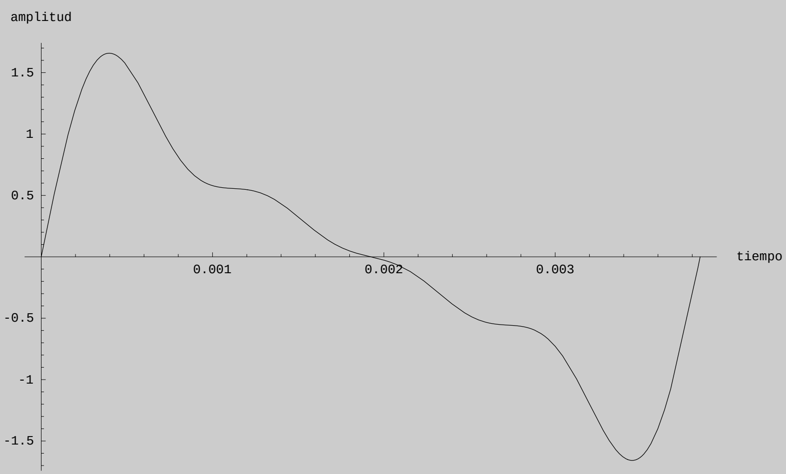




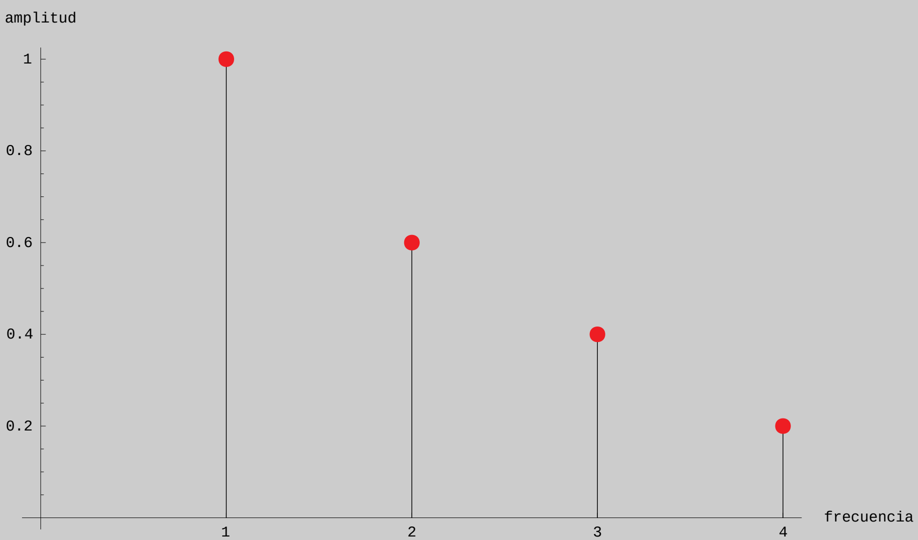
1.3. Dominio del tiempo y de la frecuencia

Aquí tienes una representación en el dominio del tiempo de la señal

$$\mathrm{sen}(260\times 2\pi t)+.6\,\mathrm{sen}(2\times 260\times 2\pi t)+.4\,\mathrm{sen}(3\times 260\times 2\pi t)+.2\,\mathrm{sen}(4\times 260\times 2\pi t)$$



Aquí tienes la representación de la misma señal en el dominio de la frecuencia (la unidad en el eje de frecuencias representa 260 Hz).



1.4. Polinomios trigonométricos y coeficientes de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) escribió en 1807 un trabajo sobre la propagación del calor en el que se afirmaba que cualquier señal continua con período $1/\nu$ podía representarse como suma de ondas sinusoidales en la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2n\pi\nu t + \phi_n)$$

Para empezar nuestro estudio consideremos no una serie sino una suma finita y, por comodidad, *supondremos que el período de nuestra señal es* 1. Tenemos, pues, una suma de la forma:

$$\sum_{n=0}^{N} A_n \operatorname{sen}(2n\pi t + \phi_n) \tag{1}$$

Es frecuente llamar a las sinusoides individuales de una suma de este tipo *armónicos*. Esta forma de una suma trigonométrica de armónicos tiene la ventaja de mostrar explícitamente la amplitud y la fase de cada uno de ellos pero es muy incómoda para los cálculos.

Por ello es más frecuente escribir esta suma en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(2\pi n t) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n t)\right) \tag{2}$$

la razón de escribir el término constante en la forma $a_0/2$ es para simplificar las fórmulas de los coeficientes que veremos pronto.

Se trabaja con mucha más comodidad con estas sumas si usamos la exponencial compleja. Usando las ecuaciones de Euler tenemos que:

$$\cos(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int} + e^{-2\pi int}}{2}, \qquad \operatorname{sen}(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int} - e^{-2\pi int}}{2i}$$

con ello la suma **??** puede ser escrita como:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi int} \tag{3}$$

La relación entre estas tres formas distintas de escribir una misma suma trigonométrica viene dada por las siguientes igualdades válidas para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{4}$$

$$a_n = A_n \operatorname{sen}\phi_n \qquad b_n = A_n \cos\phi_n \tag{5}$$

Una suma como la que estamos considerando se llama un *polinomio trigonométrico* de orden n.

Supongamos que tenemos una señal f que podemos representar como un polinomio trigonométrico:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t}$$

y nuestro problema es calcular los coeficientes c_n. Para ello multiplicamos dicha igualdad por $\mathrm{e}^{-2\pi i k t}$ y obtenemos que:

$$\mathrm{e}^{-2\pi i k t} f(t) = c_k + \sum_{n=-N, n\neq k}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi i (n-k) t}$$

Ahora integramos ambos lados entre 0 y 1 y tenemos en cuenta que si $q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$ entonces:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i q t}\, \mathrm{d}t = 0$$

Resulta así que:

$$c_k = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i k t} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Si ahora suponemos que f tiene período T podemos considerar la función $g(t)=f(tT)$ que tiene período 1. Supuesto que

$$g(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t}$$

se deduce enseguida que:

$$f(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t/T}$$

donde los coeficientes vienen dados por:

$$c_n=\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n s} g(s)\,\mathrm{d}s=[s=t/T]=\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T} g(t/T)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Las consideraciones anteriores motivan a las siguientes definiciones.

Definición. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una señal de periodo T integrable en $[0,T]$. Se definen los *coeficientes de Fourier complejos* de f por:

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (n\in\mathbb{Z}) \tag{6}$$

El polinomio trigonométrico:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi int/T} \tag{7}$$

donde los coeficientes c_n vienen dados por **??**, se llama *polinomio de Fourier de orden* n de f. La sucesión de los polinomios de Fourier de f se llama *serie de Fourier* de f. Cuando dicha serie converge escribimos:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi int/T}$$

Teniendo en cuenta **??** se deduce que las igualdades **??** y **??** pueden escribirse de forma equivalente:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \operatorname{sen}(2\pi nt/T)\right) \tag{8}$$

donde:

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\mathrm{e}^{-2\pi int/T} + \mathrm{e}^{2\pi int/T}\right) f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \cos(2\pi nt/T) f(t)\,\mathrm{d}t \quad (9)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{T}\int_0^T i\left(\mathrm{e}^{-2\pi int/T} - \mathrm{e}^{2\pi int/T}\right) f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \operatorname{sen}(2\pi nt/T) f(t)\,\mathrm{d}t \quad (10)$$

son los *coeficientes de Fourier reales* de f. Los a_n se llaman *coeficientes coseno* y los b_n *coeficientes seno* de f.

Es frecuente que $T = 2\pi$ y que se elija como intervalo de integración $[-\pi, \pi]$ con lo cual se tiene:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{11}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)\, dt \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{12}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nt) f(t)\, dt \qquad n = 1, 2, \dots \tag{13}$$

1.4.1. Observaciones

Para calcular los coeficientes de Fourier de una señal de periodo T podemos integrar en cualquier intervalo de longitud T. Suele ser frecuente, por razones de simetría, elegir el intervalo $[-T/2, T/2]$.

Observa que nada hemos dicho aún sobre la relación entre una función f y su serie de Fourier. La pregunta ¿de qué modo la serie de Fourier de f representa a f? no tiene una respuesta fácil porque tiene muchas respuestas. Mas adelante presentaremos algunos resultados en este sentido.

Observa que si cambias una función en un número finito de puntos esto no afecta para nada a sus coeficientes de Fourier los cuales viene dados por medio de integrales.

A diferencia de la serie de Taylor de una función, la cual solamente está definida si dicha función es indefinidamente derivable, la única condición para que la serie de Fourier de una función esté definida es que la función sea integrable en un intervalo. Te recuerdo que hay funciones integrables con infinitas discontinuidades. Es decir, el concepto de serie de Fourier es mucho menos restrictivo que el de serie de Taylor y esa es una de las grandes ventajas de la teoría de series de Fourier: puede aplicarse a funciones muy generales.

En contra de lo que pudiera parecer a primera vista, la hipótesis de periodicidad no es restrictiva para la aplicación de la teoría de series de Fourier. En efecto, si estamos interesados en representar por medio de una serie de Fourier una función f definida e integrable en un intervalo $[a,b]$ podemos *extender* dicha función a todo $\mathbb{R}$ de manera que la extensión sea una función periódica de período $T=b-a$. Para ello basta repetir la gráfica de f en intervalos de longitud T (si $f(b)=f(a+T)\neq f(a)$ será preciso cambiar el valor de f en uno de los extremos del intervalo $[a,b]$).

Observa que las fórmulas que dan los coeficientes de Fourier de una función f tienen perfecto sentido para funciones complejas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. La consideración de funciones complejas, si bien desde un punto de vista teórico no presenta ninguna dificultad e incluso hace que la teoría sea más elegante y fácil de desarrollar, desde un punto de vista práctico no añade nada pues en las aplicaciones siempre se consideran señales reales.

1.5. Series de Fourier seno y coseno

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una señal de periodo T integrable en $[0,T]$ y pongamos $T/2=L$.

- Si f es par, esto es $f(-t)=f(t)$, entonces, teniendo en cuenta que la función coseno es par y la función seno es impar, se deduce que:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi nt/T)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(\pi nt/L)f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi nt/T)f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (n=1,2,\dots)$$

- Análogamente, si f es impar, esto es $f(-t)=-f(t)$, entonces tenemos que:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(2\pi nt/T)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi nt/T)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{L}\int_0^L \operatorname{sen}(\pi nt/L)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Este resultado lleva a definir las series de Fourier seno y coseno.

Sea ahora f *una función definida e integrable en el intervalo* $[0,L]$. Podemos *extender* f al intervalo $[-L,L]$ de dos formas distintas:

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L \leqslant x < 0 \\ f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

y

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & -L \leqslant x < 0 \\ f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

Es claro que f_1 es impar y f_2 es par y coinciden con f en $[0,L]$. La función f_1 es llamada la *extensión impar* de f y f_2 es llamada la *extensión par* de f.

- La serie de Fourier de la extensión de período $2L$ de f_1 se llama la *serie de Fourier seno* de f y viene dada por:

$$\sum_{n\geqslant 1} b_n \operatorname{sen}(\pi n t/L), \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\operatorname{sen}(\pi n t/L)\,\mathrm{d}t$$

- La serie de Fourier de la extensión de período $2L$ de f_2 se llama la *serie de Fourier coseno* de f y viene dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(\pi n t/L), \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos(\pi n t/L)\,\mathrm{d}t$$

La serie de Fourier obtenida depende mucho de la extensión que se elija para f. Como regla general, debe elegirse aquella extensión que tenga mejores propiedades analíticas.

1.6. Convergencia de las series de Fourier

Una función f se dice que es *continua a trozos* en un intervalo $[a,b]$ si hay una partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ del intervalo $[a,b]$ de forma que

- f es continua en cada intervalo $]x_i, x_{i+1}[$, para $i = 0,1,2,\ldots,n-1$, y
- f tiene límites laterales en los puntos x_i, $i = 0,1,\ldots,n$.

Diremos que una función f es *derivable a trozos* en un intervalo $[a,b]$ si hay una partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b$ del intervalo $[a,b]$ de forma que

- f es derivable en cada intervalo $]t_i, t_{i+1}[$, para $i = 0,1,2,\ldots,m-1$, y
- La función derivada f' tiene límites laterales en los puntos t_i, $i = 0,1,\ldots,m$.

Toda función derivable a trozos en un intervalo también es continua a trozos en dicho intervalo.

Las funciones continuas a trozos en un intervalo son integrables en dicho intervalo. Además, la integral la podemos calcular como suma de integrales en cada uno de los intervalos donde la función es continua.

El siguiente resultado nos dice que en condiciones razonablemente generales la serie de Fourier de una función converge puntualmente a dicha función.

Teorema(Riemann, Dirichlet). Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una señal periódica con período T derivable a trozos en $[0,T]$. Entonces se verifica que:

1. En todo punto $t\in\mathbb{R}$ donde f sea continua

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t/T} = f(t)$$

2. Si f no es continua en un punto t entonces se verifica que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t/T} = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$$

   donde $f(t+)$ y $f(t-)$ son, respectivamente, los límites por la derecha y por la izquierda de f en t.

2. Geometría de las series de Fourier

Representamos por $L^2(0,T)$ el espacio de las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ que son T periódicas y de cuadrado integrable en $[0,T]$. Este conjunto con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por escalares complejos es un espacio vectorial complejo.

Para todo par de funciones $f,g\in L^2(0,T)$ definimos su producto escalar por:

$$(f\mid g)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

y definimos la norma de $f\in L^2(0,T)$ por:

$$(f\mid g)=\sqrt{(f\mid f)}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \tag{15}$$

Definición. Dos funciones $f,g \in L^2(0,T)$ se llaman **ortogonales** si $(f \mid g) = 0$ en cuyo caso escribimos $f \perp g$. Un conjunto de funciones $\mathcal{B} \subset L^2(0,T)$ se dice ortogonal si para cada par de elementos distintos $f,g \in \mathcal{B}$ se tiene que $f \perp g$. Si, además para toda función $f \in \mathcal{B}$ es $\|f\| = 1$ se dice que $\mathcal{B}$ es un **conjunto ortonormal** de funciones.

Es inmediato que un conjunto de funciones ortogonales es linealmente independiente.

Ejemplo En $L^2(0,T)$ un conjunto ortonormal de funciones especialmente importante es el formado por las **exponenciales complejas**:

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathrm{e}^{2\pi i n t/T} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Otro ejemplo de conjunto ortogonal es el formado por las **funciones trigonométricas**:

$$\mathcal{T} = \{1, \cos(2\pi n t/T), \operatorname{sen}(2\pi n t/T) : n \in \mathbb{N}\}$$

Proposición Supongamos que $\mathcal{B} = \{e_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ es un conjunto de n funciones ortonormales en $L^2(0,T)$ y sea $\mathcal{M}$ el subespacio vectorial engendrado por $\mathcal{B}$. Dada una función $f \in L^2(0,T)$ la función:

$$P_{\mathcal{M}}(f) = \sum_{j=1}^{n} (f \mid e_j) e_j$$

se llama la **proyección ortogonal** de f sobre $\mathcal{M}$ y tiene las propiedades siguientes:

1. $P_{\mathcal{M}}(f) \in \mathcal{M}$.
2. $f - P_{\mathcal{M}}(f)$ es ortogonal a $\mathcal{M}$.
3. $\min\{\|f-g\| : g \in \mathcal{M}\} = \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|$

En particular, si $\mathcal{B} = \left\{\mathrm{e}^{2\pi i n t/T} : -N \leqslant n \leqslant N\right\}$, entonces

$$P_{\mathcal{M}}(f)(t) = \sum_{k=-N}^{N} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi i k t/T}\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{2\pi i k t/T}$$

es el polinomio de Fourier de orden N de f.

Teorema de Riesz-Fisher. Para toda función $f \in L^2(0,T)$ se verifica que su serie de Fourier converge a f en la norma de $L^2(0,T)$:

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \, \mathrm{e}^{2\pi i k t/T} \right\| = 0.$$

La validez del anterior teorema depende de un hecho analítico profundo: el espacio $L^2(0,T)$ es un espacio métrico completo con la distancia dada por

$$d(f,g) = \|f-g\|$$

Igualdad de Parseval. Para toda función $f \in L^2(0,T)$ se verifica que

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{16}$$

La igualdad de Parseval expresa que la energía de la señal es igual a la suma de las energías de sus armónicos componentes.

Una consecuencia de esta igualdad es el siguiente resultado.

Proposición Los coeficientes de Fourier de una función de cuadrado integrable convergen a cero.

2.1. Espectro, dominio del tiempo y dominio de la frecuencia

Una señal analógica dada por medio de una función $f(t)$ se dice que está dada en *el dominio del tiempo*.

Supongamos que dicha señal es T-periódica y que su serie de Fourier es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t/T}$$

Las frecuencias de los armónicos complejos que forman esta serie son n/T.

El *espectro* de f se define como el conjunto de pares $\{(n/T, c_n) : n \in \mathbb{Z}\}$.

El conocimiento del espectro de una señal determina a dicha señal.

Podemos considerar una función $\widehat{f}$ definida en el conjunto de las frecuencias $\{n/T : n \in \mathbb{Z}\}$ por $\widehat{f}(n/T) = c_n$. Se suele decir que dicha función representa a la señal f en el *dominio de la frecuencia*. La "gráfica" de la función $\left|\widehat{f}\right|$ se llama el *espectro de amplitudes*, y la "gráfica" de la función $\arg \widehat{f}$ se llama el *espectro de fases*.

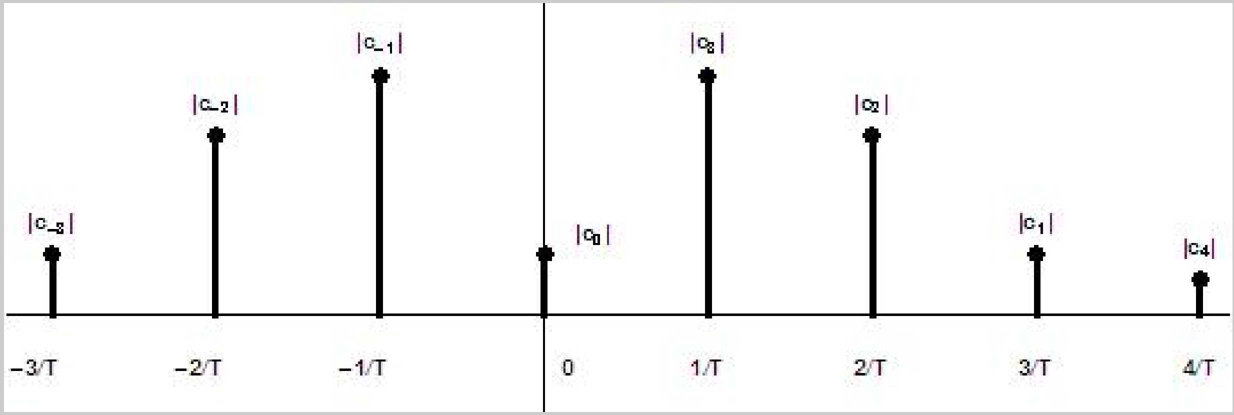


Figura 1: Espectro de amplitudes

El espectro de amplitudes consiste en líneas espectrales regularmente espaciadas en las frecuencias n/T. Para $n = 1$ y $n = -1$ las líneas corresponden a la *frecuencia fundamental*. Las demás líneas son llamadas *armónicos* de la señal.

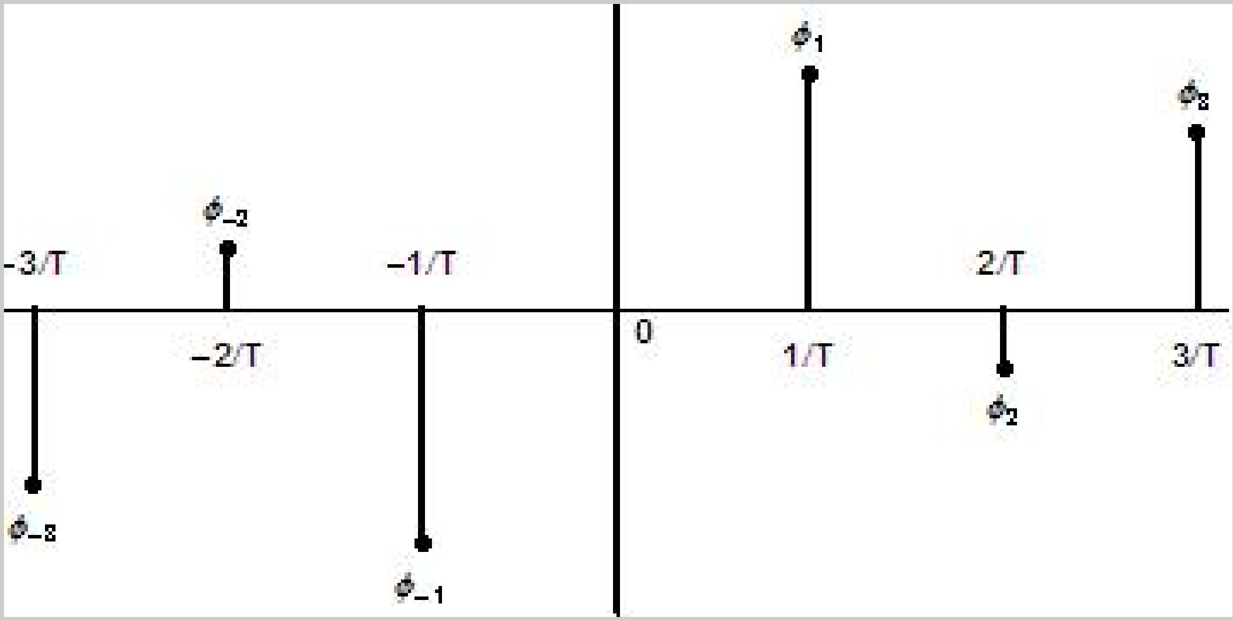


Figura 2: Espectro de fases

3. Introducción a la Transformada de Fourier Discreta

Actualmente la mayor parte de las señales están digitalizadas. Usualmente lo que conocemos de una señal es una *muestra*, esto es, una señal podemos verla como un vector cuyas componentes son valores de la señal en determinados instantes. Si el tamaño de la muestra es N, este vector está en el espacio vectorial N-dimensional $\mathbb{C}^N$.

En términos muy generales puede afirmarse que el análisis de esta señal consiste en representarla en diferentes bases de $\mathbb{C}^N$. Estas bases se eligen de forma que la correspondiente representación pueda ser fácilmente interpretada y proporcione información útil sobre la señal. Un ejemplo de esto es la Transformada de Fourier Discreta que vamos a ver a continuación.

Supongamos que conocemos N muestras de una señal periódica f de período T las cuales se han tomado en instantes igualmente espaciados a lo largo de un período $t_k = kT/N$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Conocemos, pues, los N números

$$f(kT/N) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Usando esta información *queremos calcular una buena aproximación de los coeficientes de Fourier de f*.

Como tenemos N datos parece lógico calcular N coeficientes c_n. Sabemos que bajo hipótesis muy generales se verifica que $\lim\{c_n\} = 0$, esto es, la sucesión de los coeficientes de Fourier converge a cero. Por ello los coeficientes más significativos vienen al principio. Teniendo esto en cuenta, vamos a tratar de calcular los coeficientes c_n para $n = -N/2, \ldots, N/2-1$ (en lo que sigue suponemos que N es par).

Este cálculo podemos hacerlo de dos formas.

Calculando de forma aproximada el valor de la integral

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi nt/T}\,\mathrm{d}t$$

Para ello podemos proceder como sigue:

$$c_n = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{T}\int_{kT/N}^{(k+1)T/N} f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi nt/T}\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N} f(kT/N)\,\mathrm{e}^{-2i\pi nk/N}$$

lo que nos lleva a tomar como una aproximación de los coeficientes c_n los números

$$c'_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\omega^{-nk} \quad \text{donde } \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N}, \quad -\frac{N}{2} \leqslant n \leqslant \frac{N}{2}-1 \tag{17}$$

Otra forma de proceder es calcular coeficientes $\widehat{c}_n$ por la condición de que el polinomio trigonométrico

$$P(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \widehat{c}_n \, \mathrm{e}^{2i\,\pi nt/T}$$

interpole a f en los puntos t_k, es decir, verifique que $P(kT/N) = y_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Debemos resolver para ello el siguiente sistema de N ecuaciones lineales con N incógnitas (los $\widehat{c}_n$):

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \widehat{c}_n \omega^{nk} = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{18}$$

Pues bien, se comprueba que de esta forma volvemos a obtener los mismos valores de antes, es decir $\widehat{c}_n = c'_n$.

Para expresar la solución obtenida es más cómodo definir los números:

$$Y_n = \begin{cases} \widehat{c}_n & 0 \leqslant n \leqslant \dfrac{N}{2} - 1 \\ \widehat{c}_{n-N} & \dfrac{N}{2} \leqslant n \leqslant N - 1 \end{cases}$$

Tenemos que:

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-nk} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \;\; \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N} \tag{19}$$

Definamos los vectores:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}} = \left(1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{k(N-1)}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \qquad \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N}$$

Teniendo en cuenta que $\omega^N = 1$, es fácil comprobar que los vectores $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}}$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$ son ortogonales y tienen norma igual a $\sqrt{N}$. Dichos vectores forman una base ortogonal de $\mathbb{C}^N$.

La igualdad

$$Y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-nk} = \frac{1}{N}(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{n}}) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \;\; \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N} \tag{20}$$

Nos dice que $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{N-1})$ son las coordenadas del vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$ en dicha base o, lo que es igual, notando $\mathbf{e_k}$ el vector k-ésimo de la base canónica de $\mathbb{C}^N$:

$$\mathbf{y} = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \mathbf{e_k} = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}}$$

Definición La transformación $\mathcal{F}:\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ que a un vector $\mathbf{y}=(y_0,y_1,\dots,y_{N-1})\in\mathbb{C}^N$ hace corresponder el vector $\mathbf{Y}=(Y_0,Y_1,\dots,Y_{N-1})\in\mathbb{C}^N$ dado por las igualdades

$$Y_n=\frac{1}{N}(\mathbf{y}\mid\omega_{\mathbf{n}}),\qquad \mathbf{y}=(y_0,y_1,\dots,y_{N-1}),\ \omega_{\mathbf{n}}=(1,\omega^n,\omega^{2n},\dots,\omega^{(N-1)n}),\ \omega=\mathrm{e}^{2i\pi/N} \tag{21}$$

se llama la Transformada de Fourier Discreta (DFT) en $\mathbb{C}^N$.

La DFT es una biyección lineal de $\mathbb{C}^N$ en $\mathbb{C}^N$.

$$Y_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}y_k\,\mathrm{e}^{-2i\pi nk/N},\qquad y_n=\sum_{k=0}^{N-1}Y_k\,\mathrm{e}^{2i\pi nk/N},\qquad n=0,1,2,\dots,N-1$$

3.0.1. Observaciones La definición que hemos dado de la DFT es la más usual aunque adolece de cierta falta de simetría debido al factor de escala $1/N$ que figura en la transformada directa pero no en su inversa. De hecho, la definición de la DFT puede variar de unos textos a otros. Es frecuente ortonormalizar la base formada por los vectores ω_k, esto es, considerar la base ortonormal formada por los vectores $\frac{1}{\sqrt{N}}\omega_k$. Con ello se consigue que en las fórmulas anteriores figure como factor de escala en ambas $1/\sqrt{N}$.

Aunque hemos supuesto al principio que el vector $\mathbf{y}$ se obtenía tomando N valores igualmente espaciados de una función periódica a lo largo de un período, es claro que se trataba nada más que de una motivación inicial. La TFD no tiene ninguna limitación: el vector $\mathbf{y}$ puede ser cualquier elemento de $\mathbb{C}^N$.

De hecho, la TFD se utiliza para intentar averiguar las frecuencias presentes en series de datos de cualquier naturaleza. Pero hay un convenio que se sigue siempre cuando se trabaja con la TFD y que consiste en considerar que el vector $\mathbf{y} = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}\}$ *es una muestra de una sucesión infinita periódica de período* N. Es decir, dado un entero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$, definimos $y_k = y_q$ donde $0 \leqslant q \leqslant N-1$ es el resto de la división de k por N.

Con este convenio es inmediato comprobar que el vector $\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y})$ verifica que $Y_{k+N} = Y_k$, es decir, es periódico con período N. *Esta propiedad se expresa diciendo que la TFD transforma señales periódicas discretas en el dominio del tiempo en señales periódicas discretas en el dominio de la frecuencia.*

El espectro de la señal **y** es el conjunto $\{(n/N, Y_n) : n \in \mathbb{Z}\}$. El espectro de amplitudes es el conjunto $\{(n/N, |Y_n|) : n \in \mathbb{Z}\}$ y el espectro de fases es el conjunto $\{(n/N, Arg(Y_n)) : n \in \mathbb{Z}\}$. Dichos conjuntos suelen representarse por segmentos de línea que unen los puntos $(n/N, 0)$ con los puntos del espectro correspondiente. Debido a la periodicidad de los Y_n es suficiente representar dichos espectros para N valores consecutivos de n.

Para señales **y** reales se verifica que $Y_{-n} = \overline{Y}_n$ donde la barra indica complejo conjugado. Como $Y_{-n} = Y_{N-n}$ haciendo $n = N/2 - k$ obtenemos que $Y_{N/2+k} = \overline{Y}_{N/2-k}$ de donde se deduce que

$$\left|Y_{N/2+k}\right| = \left|Y_{N/2-k}\right| \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Arg}(Y_{N/2+k}) = \operatorname{Arg}(\overline{Y}_{N/2-k}) = -\operatorname{Arg}(Y_{N/2-k})$$

Por tanto el espectro de amplitudes es simétrico respecto a $N/2$ y el espectro de fases es antisimétrico respecto a $N/2$. Por esta razón, como en la práctica siempre se trabaja con señales reales, es costumbre representar solamente la mitad más uno de los puntos de dichos espectros correspondientes a los valores $0, 1, 2, \ldots, N/2$. Los cuales son suficientes para recuperar la señal original combinándolos con sus conjugados que representan frecuencias negativas.

Hay una estrecha analogía entre la DFT y las series de Fourier.

Series de Fourier

• Se considera una señal *continua* en el dominio del tiempo, f, con período T y, por tanto, con frecuencia $1/T$ expresada en Hercios (ciclos por segundo).

Transformada de Fourier Discreta

• Se considera una señal discreta $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots y_{N-1})$ formada por N valores que se interpretan como un período de una señal discreta periódica de período N y, por tanto, frecuencia fundamental $1/N$.

Series de Fourier

• Se trata de descomponer dicha señal continua como una serie de señales con frecuencias n/T (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental). La señal continua modelo con frecuencia n/T (ciclos por segundo) es $\operatorname{sen}(2\pi nt/T)$. La forma compleja de dicha señal es la función $\mathbf{e}_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi\, int/T}$.

Transformada de Fourier Discreta

• Se trata de descomponer dicha señal discreta como una suma de señales discretas con frecuencias n/N (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $1/N$). La señal continua modelo con frecuencia n/N (ciclos por segundo) es $\operatorname{sen}(2\pi nt/N)$. La forma compleja de dicha señal es $\mathrm{e}^{2\pi\, int/N}$. Puesto que de la señal original solamente conocemos un período formado por N valores consecutivos, lo que hacemos es discretizar la señal $\mathrm{e}^{2\pi\, int/N}$ evaluándola en $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ y obtenemos así el vector

$$\omega_{\mathbf{n}} = (1, \mathrm{e}^{2\pi in/N}, \mathrm{e}^{2\pi in2/N}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi in(N-1)/N})$$

Series de Fourier

• El *peso* que la componente de frecuencia n/T tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:

$$(f \mid \mathbf{e}_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\, int/T}\,\mathrm{d}t$$

Transformada de Fourier Discreta

• El *peso* que la componente de frecuencia n/N tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:

$$(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\omega}_\mathbf{n}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\,\mathrm{e}^{-2i\,\pi nk/N}$$

Series de Fourier

• La serie que representa a la señal f es $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (f \mid \mathbf{e}_n) \mathrm{e}^{2\pi ikt/T}$. Dicha serie proporciona el espectro de la señal y constituye la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.

Transformada de Fourier Discreta

• La suma que representa a la señal discreta $\mathbf{y}$ es $\sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{y} \mid \omega_{\mathbf{n}})\omega_{\mathbf{n}}$. Dicha suma se interpreta como la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.

Series de Fourier

• En el contexto de las series de Fourier las igualdades:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\mathrm{d}t \tag{22}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T} \tag{23}$$

se llaman, respectivamente, las ecuaciones de análisis y de síntesis.

Transformada de Fourier Discreta

• Los coeficientes Y_n se llaman *coeficientes espectrales* de la señal **y**. Las igualdades:

$$Y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\,\mathrm{e}^{-2i\pi nk/N}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{24}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k\,\mathrm{e}^{2i\pi nk/N}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{25}$$

se llaman, respectivamente, las ecuaciones de análisis y de síntesis.

3.0.2. ¿Qué podemos hacer con la Transformada de Fourier Discreta?

La DFT permite representar una muestra en el dominio de la frecuencia. Para ello representamos segmentos que unen los puntos $(n/T, 0)$ y $(n/T, |Y_n|)$. En el dominio de la frecuencia la señal queda claramente descompuesta en sus componentes sinusoidales: cada segmento representa la componente sinusoidal de la frecuencia n/T y amplitud $|Y_n|$. Es muy fácil manipular esta representación para suprimir, por ejemplo, pequeñas distorsiones. En la señal original (en el dominio del tiempo) estas pequeñas distorsiones pueden quedar ocultas pero eso no ocurre en el dominio de la frecuencia pues en él podemos ver las distintas frecuencias que acompañan a la principal y podemos eliminar las frecuencias más altas que suelen corresponder a las distorsiones. Posteriormente recuperamos la señal modificada vía la DFT inversa. Esto es lo que se conoce como "filtrado de la señal" y eso es lo que hacen los convertidores digitales-analógicos.

3.0.3. Noticia sobre un famoso algoritmo: la Transformada Rápida de Fourier

Para calcular la DFT usando las fórmulas **??** son necesarias

$$(N-1)^2 \quad \text{multiplicaciones complejas}$$
$$N(N-1) \quad \text{adiciones complejas}$$

Y no hay que olvidar que una multiplicación compleja son 4 operaciones reales. Por ello el coste de cálculo de una DFT de N puntos es del orden de $4N^2$ operaciones reales de punto flotante. Para hacernos una idea de lo que esto supone, recordemos que en los años 50 un ordenador podía realizar del orden de 10^3 operaciones por segundo y para calcular una DFT de 100 puntos necesitaría un tiempo de:

$$4\times 100^2 \text{ operaciones} \times \frac{1\text{ s}}{10^3 \text{ operaciones}} = 40\,s$$

y una DFT de 1000 puntos necesitaría un tiempo de cálculo de 4000 s= 1.1h. Actualmente un PC es capaz de realizar 10^7 operaciones por segundo y el tiempo de cálculo de una DFT de 1000 puntos es 0.4 segundos. Esto parece rápido pero en la práctica está muy lejos de ser suficientemente rápido. Considera que es una técnica muy frecuente hacer una DFT de 1000 puntos para generar cada imagen de una animación. Si la animación consta de 10000 imágenes (por tanto es de muy corta duración) el tiempo total de cálculo sería de 4000 segundos, unos 67 minutos. Demasiado.

Puesto que la DFT se ha convertido en la herramienta básica para el tratamiento de señales, no es de extrañar que haya quien afirme que el mundo moderno empezó en 1965 cuando J. Cooley and J. Tukey publicaron su eficaz método para calcular la DFT. Dicho método de cálculo se conoce con el nombre de *Transformada Rápida de Fourier* (FFT=Fast Fourier Transform). Este algoritmo, que marcó una importante etapa en el desarrollo de lo que se conoce como la teoría de *complejidad de algoritmos*, reduce el coste de cálculo de la DFT (suponiendo que N es de la forma 2^p) del orden de N^2 al orden de $N\log_2(N)$. Para $N = 1024 = 2^{10}$ esto supone unas 10.240 operaciones de punto flotante, esto es, reducimos en 1/100 el tiempo de cálculo. Esta enorme reducción del coste computacional es lo que en la práctica hizo posible realizar análisis de Fourier en ordenadores, lo que explica que

> J.W. Cooley and J.W. Tukey, *An algorithm for the machine computation of complex Fourier series*, Math. Comp. **19**(1965), 297-301

< > ⋘ ⋙ ↻ ↺ ⊖ i ? P □

sea el trabajo de matemáticas más citado de todos los tiempos.[a]

3.0.4. Convolución y DFT

A efectos de la DFT consideramos los elementos de $\mathbb{C}^N$ como sucesiones periódicas con período N. En términos más precisos: dados $\mathbf{y}=(y_0,y_1,\dots,y_{N-1})\in\mathbb{C}^N$ y un entero arbitrario $k\in\mathbb{Z}$, definimos $y_k=y_q$ donde $0\leqslant q\leqslant N-1$ es el resto de la división de k por N.

Se define la convolución[b] (llamada a veces convolución circular o periódica o cíclica) de dos elementos de $\mathbb{C}^N$, $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\dots,x_{N-1})$ e $\mathbf{y}=(y_0,y_1,\dots,y_{N-1})$ como el elemento $\mathbf{z}=(z_0,z_1,\dots,z_{N-1})$ de $\mathbb{C}^N$ definido por:

$$z_k=\sum_{q=0}^{N-1}x_q y_{k-q}\qquad k\in\mathbb{Z}$$

Es inmediato que z_k es una sucesión periódica con período N. Escribiremos simbólicamente $\mathbf{z}=\mathbf{x}\odot\mathbf{y}$.

[a] Tukey fue también el inventor del término “bit” como una abreviatura de “binary digit”. ¿No sería esto motivo suficiente para pasar a la Historia?

[b] Este es uno de los distintos tipos de convolución más frecuentes. Las operaciones de convolución son muy usadas en el procesamiento de señales digitales. Los tipos de filtros más frecuentes actúan sobre la señal de entrada “input” haciendo una convolución con la “función de transferencia del filtro”.

Fijado $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$, la aplicación que a un vector $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ hace corresponder el producto de convolución $\mathbf{z} = \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$ es una aplicación lineal de $\mathbb{C}^N$ en $\mathbb{C}^N$ que podemos escribir en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_{N-1} & \cdots & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 & \cdots & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & y_{N-3} & \cdots & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Las propiedades del producto de convolución se deducen fácilmente de la siguiente importante propiedad.

Dados dos vectores $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ y $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ en $\mathbb{C}^N$ notaremos por $\mathbf{ab} \in \mathbb{C}^N$ su **producto puntual**:

$$\mathbf{ab} = (a_0 b_0, a_1 b_1, \ldots, a_{N-1} b_{N-1})$$

Proposición Sean $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$ vectores en $\mathbb{C}^N$. Entonces se verifica que:

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{x}\odot\mathbf{y}\right)=N\mathcal{F}\left(\mathbf{x}\right)\mathcal{F}\left(\mathbf{y}\right),\qquad \mathcal{F}\left(\mathbf{xy}\right)=\mathcal{F}\left(\mathbf{x}\right)\odot\mathcal{F}\left(\mathbf{y}\right) \tag{27}$$

Demostración Pongamos $\mathbf{z}=\mathbf{x}\odot\mathbf{y}$, $\mathbf{X}=\mathcal{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Y}=\mathcal{F}(\mathbf{y})$ y $\mathbf{Z}=\mathcal{F}(\mathbf{z})$. Por definición:

$$Z_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}x_q y_{k-q}\omega^{-nk}$$

permutando el orden en las sumas obtenemos que:

$$Z_n=\frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1}x_q\omega^{-nq}\sum_{k=0}^{N-1}y_{k-q}\omega^{-n(k-q)}=N X_n Y_n$$

lo que prueba la primera igualdad en **??**. La otra igualdad se comprueba de forma análoga. $\boxed{\checkmark}$

Un uso frecuente de la FFT es para calcular convoluciones. Observa que la igualdad **??** implica que para calcular el producto de convolución $\mathbf{y}\odot\mathbf{x}$ se necesitan:

$$N^2 \quad \text{multiplicaciones complejas}$$
$$N(N-1) \quad \text{adiciones complejas}$$

La igualdad $\mathcal{F}\left(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}\right) = N\mathcal{F}(\mathbf{x})\mathcal{F}(\mathbf{y})$ implica que:

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = N\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\mathbf{x})\mathcal{F}(\mathbf{y})\right)$$

lo que permite usar el algoritmo de la FFT para calcular convoluciones ahorrando tiempo de cálculo.